Тестовый минимум задач по курсу
«Теория вероятности, математическая статистика, случайные процессы» (ПОВТ 2-ой курс)

1. Операции над событиями. Классическое определение вероятности

1. Подбрасывается одна монета. Описать пространство элементарных событий Ω, все возможные события и их вероятности.
2. Подбрасываются две монеты. Описать пространство элементарных событий Ω, а также следующие события и их вероятности.
   A – выпала хотя бы одна решка; B – обе монеты выпали одинаковыми сторонами;
   C – выпали два герба; $D=AB$; $E = A\overline{B}$; $F = A \cup B$; $G = B \cup \overline{A}$.
   Проверить для указанных событий равенства:
   $(A \cup B)C = AC \cup BC$ и $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.
3. Подбрасываются три монеты. Описать пространство элементарных событий Ω, а также следующие события и их вероятности:
   A – ровно на двух монетах выпал герб; B – ровно на двух монетах выпала решка;
   C – хотя бы на двух монетах выпал герб; D – на первой монете выпал герб;
   $E = C \setminus A$; $F = A \setminus C$; $G = \overline{A}$; $H = \overline{B}$
   Проверить для указанных событий равенства: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A}\overline{B}$ и $\overline{AD} = \overline{A} \cup \overline{D}$.
4. Дана колода из 52 карт со значениями (2,3,4,5,6,7,8,9,10,В,Д,К,Т) и мастями (♠,♣,♥,♦). Из нее наудачу берется одна карта. Описать пространство элементарных событий Ω, а также следующие события и их вероятности:
   A – вытащена 7; B – вытащена карта черной масти; C – вытащена красная карта старше 10;
   D – вытащена дама пик; $E=AB$; $F = A \cup B$.
5. Даны события A, B, C. Описать следующие события:
   а) наступило событие A; б) событие B наступило, C не наступило; в) наступили события A и B, событие C не наступило; г) наступило событие A, события B и C не наступили;
   д) наступили все события A,B,C; е) не наступило ни одно из событий A,B,C; ж) наступило ровно одно из событий A,B,C; з) наступили ровно два из событий A,B,C; и) наступило хотя бы одно из событий A,B,C; к) хотя бы одно из событий A,B,C не наступило.
6. Подбрасываются два кубика. Описать пространство элементарных событий Ω, а также следующие события и их вероятности:
   A – выпали две шестерки; B – сумма выпавших чисел равна 7; C – число на первом кубика больше, чем на втором; D – выпали одинаковые числа; E– выпали разные числа;.
7. В ящике 18 стандартных и две бракованных детали. Наудачу берется одна деталь. Описать пространство элементарных событий Ω, а также следующие события и их вероятности:
   A – вытащена стандартная деталь; B – вытащена бракованная деталь.

2. Комбинаторный подход

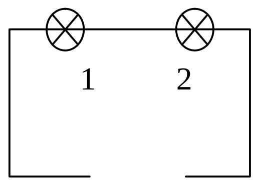
1. Секретарша подготовила 7 писем и разложила их случайным образом по 7 конвертам. Какова вероятность того, что все они дойдут до адресатов, если
   а) все 7 адресатов различны
   б) адресатов 5, одному из них адресованы 3 письма (и на 3 конвертах написан одинаковый адрес)
   в) адресатов двое, одному адресованы 3 письма, другому – 4
2. Ребенок играет с буквами ААММ. Какова вероятность того, что он случайно сложит из них слово МАМА? Решить ту же задачу для букв АААБВНР и слова БАРАБАН.
3. В урне 20 белых и 5 черных шаров. Делается 10 выборок с возвращением. Найти вероятности событий:
   А – все шары белые;
   В – все шары черные;

C – 3 первых шара белые, 7 последних шаров черные;
D – в общей сложности 3 шара белые, 7 шаров черные.

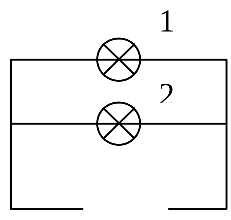
4. В урне 20 белых и 15 черных шаров. Делается 10 выборок без возвращения. Найти вероятности событий:
   A – все шары белые;
   B – все шары черные;
   C – 3 первых шара белые, 7 последних шаров черные;
   D – в общей сложности 3 шара белые, 7 шаров черные.
5. Лифт с 7 пассажирами движется с 1-го этажа по 10-ый. Какова вероятность того, что все они выйдут на разных этажах?
6. Кубик подбрасывается 6 раз. Какова вероятность того, что все 6 выпавших чисел будут различны?
7. В течение недели произошло 7 дорожно-транспортных происшествий. Какова вероятность того, что все они случились в разные дни недели?
8. Перемешано 28 костей домино (со значениями от «пусто» до 6). Найти вероятность того, что случайно вытащенная кость является «дублем».

3. Формулы сложения и умножения вероятностей

1. Два стрелка стреляют по мишени. Пусть A_1, A_2 – события, состоящие в том, что первый и второй стрелки попали в цель. Известно, что $P\{A_1\}=0.7$, $P\{A_2\}=0.6$, $P\{A_1A_2\}=0.45$. Описать следующие события и найти их вероятности:
   а) в цель попал хотя бы один стрелок;
   б) в цель не попал ни один из стрелков;
   в) в цель попал только первый стрелок;
   г) в цель попал только второй стрелок;
   д) в цель попали оба стрелка.
2. Пусть в условиях предыдущей задачи события A_1, A_2 независимы. .Если $P\{A_1\}=0.7$, $P\{A_2\}=0.6$, то описать следующие события и найти их вероятности:
   а) в цель попал хотя бы один стрелок;
   б) в цель не попал ни один из стрелков;
   в) в цель попал только первый стрелок;
   г) в цель попал только второй стрелок;
   д) в цель попали оба стрелка.
3. В электрической цепи, приведенной на рисунке, лампочки перегорают независимо друг от друга в момент включения. Пусть A_1, A_2 – события, состоящие в том, что перегорели первая и вторая лампочки. Известно, что $P\{A_1\}=0.1$, $P\{A_2\}=0.2$. Описать следующие события и найти их вероятности:
   а) обе лампочки не перегорят;
   б) обе лампочки перегорят;
   в) перегорит только первая лампочка;
   г) перегорит только вторая лампочка;
   д) перегорит хотя бы одна лампочка;
   е) не перегорит хотя бы одна лампочка;
   ж) свет не загорится;
   з) свет загорится.

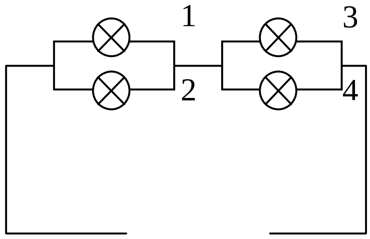


4. В электрической цепи, приведенной на рисунке, лампочки перегорают независимо друг от друга в момент включения. Пусть A_1, A_2 – события, состоящие в том, что перегорели первая и вторая лампочки. Известно, что $P\{A_1\}=0.1$, $P\{A_2\}=0.2$. Описать следующие события и найти их вероятности:
   а) обе лампочки не перегорят;
   б) обе лампочки перегорят;
   в) перегорит только первая лампочка;
   г) перегорит только вторая лампочка;
   д) перегорит хотя бы одна лампочка;

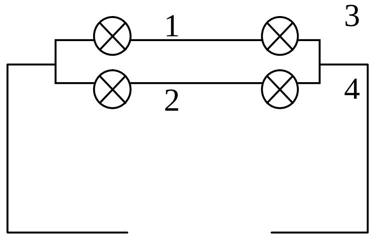


е) не перегорит хотя бы одна лампочка;
ж) свет не загорится;
з) свет загорится.

5. В электрической цепи, приведенной на рисунке, лампочки перегорают независимо друг от друга в момент включения. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, события, состоящие в том, что перегорели первая, вторая, третья и четвертая лампочки. Известно, что $P\{A_1\}=0.1$, $P\{A_2\}=0.2$, $P\{A_3\}=0.3$, $P\{A_4\}=0.4$. Найти вероятность того, что свет после включения будет гореть.



6. В электрической цепи, приведенной на рисунке, лампочки перегорают независимо друг от друга в момент включения. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, события, состоящие в том, что перегорели первая, вторая, третья и четвертая лампочки. Известно, что $P\{A_1\}=0.1$, $P\{A_2\}=0.2$, $P\{A_3\}=0.3$, $P\{A_4\}=0.4$. Найти вероятность того, что свет после включения будет гореть.



7. Устройство содержит 3 узла, которые независимо друг от друга выходят из строя с вероятностями равными 0.2, 0.3, 0.4. Устройство подлежит замене, если из строя вышли хотя бы любые 2 узла. Найти вероятность замены устройства.
8. Студент выучил 20 билетов из 25. Он тянет 3 билета (выборка без возвращения). Пусть A_1, A_2, A_3 – события, состоящие в том, что 1-ый, 2-ой, 3-ий взятые билеты ему известны. Найти вероятности $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)$, $P(A_1\,\overline{A_2}\,A_3)$, $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$, $P(A_1\,A_2\,A_3)$.
9. Подбрасываются три кубика. Найти вероятности событий:
   а) ровно на одном кубике выпала 6;
   б) ровно на двух кубиках выпала 6;
   в) ровно на трех кубиках выпала 6;
   г) ни на одном из кубиков не выпала 6;
   д) по крайней мере на одном из кубиков выпала 6.
10. Подброшены три кубика. Найти условные вероятности того, что на всех трех кубиках выпала 6, если известно, что

а) хотя бы на одном кубике выпала 6;
б) хотя бы на двух кубиках выпала 6;
в) на трех кубиках выпала 6;
г) ни на одном из кубиков не выпала 6;
д) на первом кубике выпала 6.

4. Формула полной вероятности и формула Байеса

1. Пусть в партии деталей
   20 – изготовлены на 1-ом станке
   25 – изготовлены на 2-ом станке
   5 – изготовлены на 3-ем станке.

При этом вероятности брака следующие:
   0.02 – на 1-ом станке
   0.01 – на 2-ом станке
   0.05 – на 3-ем станке.

Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

2. Пусть в условиях предыдущей задачи взятая наудачу деталь оказалась бракованной. Какова в этом случае апостериорная вероятность того, что она изготовлена на 1-ом, 2-ом, 3-ем станках?
3. Один из двух стрелков стреляет по мишени: первый с вероятностью 0.6, второй – с вероятностью 0.4. Первый поражает мишень с вероятностью 0.7, второй – с вероятностью 0.9. Определить вероятность поражения мишени.

4. Пусть в условиях предыдущей мишени стрелок попал в цель. Какова в этом случае апостериорная вероятность того что стрелял первый стрелок, второй стрелок?

5. Дискретная случайная величина

1. Случайная величина X задана распределением

X	0	1	2	3	4	$\sum$
p_i	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1	1

Найти M(X), M(X^2), D(X), медиану и моду. Построить точечную диаграмму и функцию распределения.

2. Случайная величина X задана распределением

X	1	3	4	5	8	$\sum$
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Найти M(X), M(X^2), D(X) , медиану и моду. Построить точечную диаграмму и функцию распределения.

6. Некоторые стандартные дискретные распределения (равномерное, биномиальное, Пуассона, геометрическое)

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на множестве {20,21,…,34,35}. Найти M(X), D(X), медиану и моду. Построить точечную диаграмму и функцию распределения.
2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на множестве {-4,-3.8,…,-2.2,-2.0}. Найти M(X), D(X), медиану и моду. Построить точечную диаграмму и функцию распределения.
3. Подбрасывается 6 монет. Случайная величина X равна количеству выпавших гербов. Найти ее распределение, M(X), D(X), медиану и моду. Построить точечную диаграмму и функцию распределения.
4. Подбрасывается 12 кубиков. Найти вероятность выпадения ровно трех шестерок, ровно двух шестерок, ровно пяти шестерок.
5. Кубик подбрасывается четыре раза, при этом игрок получает выигрыш в случае выпадения числа кратного трем (3 или 6). Описать случайную величину равную полному выигрышу игрока, построить точечную диаграмму и функцию распределения, указать медиану и моду.
6. Устройство содержит 5 узлов, каждый из которых выходит из строя независимо от других с вероятностью 0.06. Устройство подлежит замене, если вышли из строя хотя бы любые 3 узла. Определить вероятность замены.
7. На 10 однотипных станках зафиксировано 20 повреждений за месяц. Оценить вероятность 0, 1, 2, 3 повреждений на одном станке за месяц; 0, 1, 2 повреждений на двух станках за 10 дней.
8. В условиях задачи 7 три станка входят в состав участка. Оценить вероятность хотя бы одного повреждения на станках участка в течение недели, не менее двух повреждений за тот же период. Пусть стоимость одного ремонта равна 5000 рублей. Оценить математическое ожидание стоимости ремонта станков участка за неделю.
9. В партии из 1000 приборов из строя вышли 50. Оценить вероятность выхода из строя 3 аналогичных приборов в партии из 20 штук. Пусть замена неисправного прибора стоит 100 рублей. Оценить математическое ожидание стоимости замены приборов в партии из 20 штук.
10. На 500 страницах книги в общей сложности 60 опечаток. Оценить вероятность 0, 1, 2, 3 опечаток на 10 наугад выбранных страницах.
11. Подбрасывается кубик. Найти вероятность того, что первая шестерка выпала на 2-ом, 4-ом, 6-ом, 10-ом, i-ом подбрасывании.

12. Среднее время до отказа прибора равно 100 дням. Оценить следующие вероятности:
   а) отказа не будет в течение первых 50 дней работы;
   б) отказ случится во вторые 50 дней работы;
   в) отказ случится в первые 25 дней работы;
   г) за 80 дней случится ровно 3 отказа (предполагается, что в случае отказа прибор тут же ремонтируют)
13. При эксплуатации прибора в течение полугода случилось шесть отказов, причем в случае отказа прибор сразу ремонтируют. Предположим, что только что сделан очередной ремонт. Оценить следующие вероятности:
   а) отказа не будет в течение последующих 30 дней работы;
   б) отказ случится во вторые 30 дней работы;
   в) отказ случится после 50 дней работы.

7. Совместное распределение дискретных случайных величин

1. Совместное распределение случайных величин X_1, X_2 имеет вид

X_1 \ X_2	0	1
1	0.1	0.2
2	0.3	0.1
3	0.1	0.2

Найти маргинальные распределения случайных величин X_1, X_2, их математические ожидания и дисперсии. Найти их условные распределения, условные математические ожидания и дисперсии. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X_1, X_2.

2. Совместное распределение случайных величин X_1, X_2 имеет вид

X_1 \ X_2	0	1
1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

Найти маргинальные распределения случайных величин X_1, X_2, их математические ожидания и дисперсии. Найти их условные распределения, условные математические ожидания и дисперсии. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X_1, X_2.

8. Непрерывная случайная величина

1. Случайная величина X задана распределением

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{при } -1 \le x < 0 \\ 1-x, & \text{при } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найти M(X), M(X^2), D(X), медиану и моду, функцию распределения. Найти вероятности P{X<0.5}, P{X>0.2}, P{-0.3<X<0.7}.

2. Случайная величина X задана распределением

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{при } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найти M(X), M(X^2), D(X), медиану и моду, функцию распределения. Найти вероятности P{X<0.7}, P{X>0.2}, P{0.3<X<0.8}.

3. Случайная величина X задана распределением

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2e^{-x}}{2} & \text{при} \quad x\ge 0\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Найти M(X), M(X^2), D(X), медиану и моду, функцию распределения. Найти вероятности P{X<2}, P{X>3}, P{3<X<8}

4. Случайная величина X задана распределением

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ x_0^a}{x^{a+1}} & \text{при} \quad x\ge x_0,\ \ a>2\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Найти M(X), M(X^2), D(X), медиану и моду. Построить график функции распределения.

9. Некоторые стандартные непрерывные распределения (равномерное, показательное, бета-распределение, нормальное, логнормальное)

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [10,20]. Найти M(X), D(X) и вероятности P{X<12}, P{13<X<18}.
2. Пусть по данным статистики среднее время наработки прибора на отказ равно 10 дням. Определить вероятности того, что
   а) не выйдет из строя в течение первых 10 дней;
   б) выйдет из строя на второй неделе работы;
   в) выйдет из строя на первой неделе работы;
   г) выйдет из строя после 15 дней работы.
3. Пусть по данным статистики среднее время наработки прибора на отказ равно 0.5 года. Определить вероятности
   а) безотказной работы прибора в течение 1 года;
   б) отказа прибора в течение первых 3-х месяцев работы;
   в) отказа прибора в течение вторых 3-х месяцев работы;
   г) ровно 3-х отказов прибора в течение года
4. Пусть продолжительность техпроцесса по данным статистики имеет мат. ожидание M(X)=57, дисперсию D(X)=3. Считая, что X имеет бета-распределение на отрезке [50,60], найти его параметры и определить вероятности P{X<55}, P{53<X<57}.
5. Распределение доходов населения описывается случайной величиной X, имеющей логнормальное распределение. По данным наблюдений для Y=ln(X) известны математическое ожидание M(Y)=7.3 и дисперсия D(Y)=1. Оценить вероятности P{X<1400}, P{X>3500}, P{500<X<2000}.
6. Размер изготовленной детали есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами M(X)=100 мм, σ(X)=0.1 мм. Оценить следующие вероятности:
   а) взятая наудачу деталь окажется в пределах допуска на отклонение от M(X) равного ±0.25 мм;
   б) размер детали не превысит 100.15 мм.
   Какова должна быть точность изготовления детали σ(X), чтобы при допуске ±0.2 мм нахождение размера детали в пределах допуска гарантировалось с вероятностью 0.95?
7. Вес изделия есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами M(X)=50 кг, σ(X)=0.5 кг. Оценить следующие вероятности:
   а) взятое наудачу изделие окажется в пределах допуска на отклонение от M(X) равного ±1.5 кг;
   б) вес изделия будет меньше 49.5 кг.
   Какова должна быть точность изготовления изделия σ(X), чтобы при допуске ±1 кг гарантировать нахождение веса в пределах допуска с вероятностью 0.9?

10. Совместное распределение непрерывных случайных величин

1. Случайные величины X_1, X_2 имеют постоянную плотность распределения в области $\{X_2 \le 1 - X_1, X_2 \le 1 + X_1, X_2 \ge 0\}$. Найти их маргинальные плотности распределения, математические ожидания и дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции.
2. Случайные величины X_1, X_2 имеют постоянную плотность распределения в области $\{X_2 \le 1 - X^2{}_1, X_2 \ge 0\}$. Найти их маргинальные плотности распределения, математические ожидания и дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции.
3. Случайные величины X_1, X_2 имеют постоянную плотность распределения в области $\{X_2 \le X_1, X_2 \ge X_1 - 1, X_2 \ge 0, X_2 \le 1\}$. Найти их маргинальные плотности распределения, математические ожидания и дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции.
4. Пусть независимые случайные величины X, Y имеют стандартное нормальное распределение, т.е. M(X)=M(Y)=0, D(X)=D(Y)=1. Указать такие *a*, *b*, что для нормально распределенной случайной величины Z=*a*X+*b*Y выполнены равенства M(Z)=0, D(Z)=1, ρ(X,Z)=-0,5.
5. Пусть X, Y имеют совместное нормальное распределение с параметрами M(X)=M(Y)=0, D(X)=D(Y)=1, ρ(X,Y)=0,6. Указать такие *a*, *b*, что для нормально распределенной случайной величины Z=*a*X+*b*Y выполнены равенства M(Z)=0, D(Z)=1, ρ(X,Z)=0, т.е. X, Z – независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением.

11. Центральная предельная теорема

1. Подбрасывается 400 монет. Оценить вероятность того, что число выпавших гербов находится в пределах от 180 до 220.
2. Кубик подбрасывается 600 раз. Оценить вероятность того, что общее число выпавших шестерок находится в пределах от 90 до 110.
3. Кубик подбрасывается 500 раз. Оценить вероятность того, что сумма выпавших очков находится в пределах от 1680 до 1820.
4. Оценить вероятность того, что сумма 60 равномерно распределенных на отрезке [0,1] случайных величин находится в пределах от 23 до 35.
5. На одной странице книги в среднем 225 букв ‘е’. Оценить вероятности того, что на взятой наугад странице этих букв:
   а) меньше 200;
   б) больше 240;
   в) от 210 до 240.

12. Статистические оценки параметров нормального распределения и основы регрессионного анализа

1. Дана выборка из нормального распределения
   6,94; 5,33; 12,77; 5,38; 10,12; 5,29; 3,76; 5,46; 4,29; 6,41; 5,35; 8,00; при этом
   $x_1+\ldots+x_{12}=79{,}1$; $x_1^2+\ldots+x_{12}^2=595.02$.
   Оценить с доверительной вероятностью P=0.9 неизвестное значение M(X)
   а) из нормального распределения, считая известным σ (X)=3;
   б) из распределения Стьюдента, считая σ (X) неизвестным.
   Оценить с доверительной вероятностью P=0.9 неизвестное значение σ(X) из χ^2 распределения
   в) считая известным M(X)=6;
   г) считая M(X) неизвестным.
2. Дана выборка из нормального распределения
   4,06; -0,73; -3,79; -0,74; -0,99; 1,00; 0,50; -1,07; -0,34; 0,78; при этом
   $x_1+\ldots+x_{10}=-1{,}31$; $x_1^2+\ldots+x_{10}^2=36.08$.

Оценить с доверительной вероятностью P=0.9 неизвестное значение M(X)
а) из нормального распределения, считая известным σ(X)=2;
б) из распределения Стьюдента, считая σ(X) неизвестным.
Оценить с доверительной вероятностью P=0.9 неизвестное значение σ(X) из χ^2 распределения
в) считая известным M(X)=0;
г) считая M(X) неизвестным.

3. Дана выборка:

Y_i	1,5	1,55	2,2	2,15	2,5
X_i	1	1,5	2	2,5	3

Найти уравнение парной регрессии $\hat{Y}_i = a + bX_i$.

4. Дана выборка:

Y_i	1,5	1,65	1,72	1,95	2,25
X_i	1	1,1	1,2	1,4	1,7

Найти уравнение парной регрессии $\hat{Y}_i = a + bX_i$.

5. Дана выборка:

Y_i	1,5	1,75	1,94	2,35	2,65
X_{1i}	0,5	0,6	0,75	0,85	0,9
X_{2i}	1	1,1	1,2	1,4	1,7

Найти уравнение множественной регрессии $\hat{Y}_i = a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i}$.

6. Дана выборка:

Y_i	1,8	2,25	2,1	2,45	2,2
X_i	1	1,5	2	2,5	3

Найти уравнение нелинейной регрессии $\hat{Y}_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2$.

13. Цепи Маркова

1. Цепь Маркова описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Начертить граф цепи. Проверить возвратность состояний и найти предельное распределение.

2. Цепь Маркова описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Начертить граф цепи. Проверить возвратность состояний и найти предельное распределение.